

УДК 621.322

Исмаилова Н.Т.

Институт Информационных Технологий НАНА, Баку, Азербайджан
aliyevanig@rambler.ru

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

Рассматривается задача аппроксимации функций принадлежности треугольного, трапецеидального, гауссовского, колоколообразного типа и из класса гладких функций. Получены аналитические формулы градиента целевой функции для разных классов функций принадлежности. Приведены результаты, полученные в процессе минимизации целевой функции, показаны графики функций принадлежности.

Ключевые слова: функция принадлежности, нечеткие множества, целевая функция, задача аппроксимации.

Постановка задачи

В литературе предложены различные классы функций принадлежности [1]. В данной работе приводится решение задачи аппроксимации для функций принадлежности треугольного, трапецеидального, гауссовского, колоколообразного типа и из класса гладких функций принадлежности (ФП). Каждый из указанных классов ФП определяется векторами параметров, причем для каждого класса количество параметров и их назначение различно. Ниже рассматривается решение задачи идентификации значений параметров ФП в рамках задач конечномерной аппроксимации функций из заданного класса функций.

Пусть имеется N независимых экспертных значений степени (функции) принадлежности $\bar{\mu}_i$ нечеткому множеству A в заданных точках $\bar{x}_i, i = 1, \dots, N$. Предположим, что значения $\bar{x}_i, i = 1, \dots, N$ упорядочены, т.е. $\bar{x}_{i+1} \geq \bar{x}_i, i = 1, \dots, N-1$. Требуется определить вектор параметров ФП из заданного класса, при котором соответствующая ФП наилучшим образом, в смысле критерия среднеквадратичного отклонения, аппроксимирует экспертные данные:

$$F(P) = \sum_{i=1}^N (\mu(x_i, P) - \bar{\mu}_i)^2 \rightarrow \min_P, \quad (1)$$

где $\mu(x, P)$ – аппроксимируемая ФП, а $P \in R^k$, k – количество параметров в данном классе функций.

Таким образом, задача аппроксимации ФП $\mu(x, P)$ является задачей конечномерной оптимизации, для решения которой предлагается использовать метод сопряженных градиентов [2]. Для определения вектора параметров функции (1) использование итерационных методов оптимизации приводит к следующей процедуре:

$$P^{(j+1)} = P^{(j)} + \lambda_j S^{(j)}, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $\lambda_j = \arg \min F(P^{(j)} + \lambda S^{(j)})$, $S^{(0)} = -\nabla F(P^{(0)})$, $S^{(j+1)} = -\nabla F(P^{(j+1)}) + \frac{\|\nabla F(P^{(j+1)})\|^2}{\|\nabla F(P^{(j)})\|^2} S^{(j)}$,

$\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \right)^T$, где T – операция транспонирования. Для построения процедуры

(2) существенное значение имеет используемый градиент $\nabla F(x)$. В данной работе получены аналитические формулы для градиента функции $F(P)$ для разных классов функций принадлежности, что позволяет с высокой точностью решать задачи параметрической идентификации.

ФП треугольного вида

Ненормализованная функция принадлежности треугольного вида для нечетких множеств определяется с помощью четырех параметров:

$$\mu_1(x, P) = \begin{cases} p_4(x - p_1)/(p_2 - p_1), & \text{если } p_1 \leq x \leq p_2 \\ p_4(x - p_3)/(p_2 - p_3), & \text{если } p_2 \leq x \leq p_3 \end{cases},$$

где $P \in R^4$, p_4 – параметр, характеризующей высоту ФП.

Для определения параметров ФП треугольного типа, наилучшим образом аппроксимирующей данные экспертные точки, надо минимизировать функцию:

$$F_1(P) = \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_4(\bar{x}_i - p_1)/(p_2 - p_1)] - \bar{\mu}_i \}^2 + \sum_{i=N_1+1}^N \{ [p_4(\bar{x}_i - p_3)/(p_2 - p_3)] - \bar{\mu}_i \}^2, \quad (3)$$

где N_1 – количество точек удовлетворяющих условию $x_i < p_2$. Здесь следует отметить, что значение p_2 заранее не задано, определяется в процессе минимизации, и, следовательно, структура функции может меняться от итерации к итерации. Этот факт необходимо учитывать при проведении процедуры (2). Определим компоненты вектора градиента для функции (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} &= \frac{2p_4}{(p_2 - p_1)^3} \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_4(\bar{x}_i - p_1) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_1)](\bar{x}_i - p_2) \}; \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_2} &= \frac{2p_4}{(p_2 - p_1)^3} \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_4(\bar{x}_i - p_1) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_1)](p_1 - \bar{x}_i) \} + \\ &+ \frac{2p_4}{(p_2 - p_3)^3} \sum_{i=N_1+1}^N \{ [p_4(\bar{x}_i - p_3) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_3)](p_3 - \bar{x}_i) \}; \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_3} &= \frac{2p_4}{(p_2 - p_3)^3} \sum_{i=N_1+1}^N \{ [p_4(\bar{x}_i - p_3) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_3)](\bar{x}_i - p_2) \}; \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_4} &= \frac{2}{(p_2 - p_1)^2} \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_4(\bar{x}_i - p_1) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_1)](\bar{x}_i - p_1) \} + \\ &+ \frac{2}{(p_2 - p_3)^2} \sum_{i=N_1+1}^N \{ [p_4(\bar{x}_i - p_3) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_3)](\bar{x}_i - p_3) \}. \end{aligned}$$

Эти формулы используются в итерационной процедуре. Определяются оптимальные значения параметров ФП с использованием метода сопряженных градиентов.

ФП трапецидального типа

Ненормализованная трапециевидная функция принадлежности для нечетких множеств определяется с помощью пяти параметров в следующем виде:

$$\mu_2(x, P^5) = \begin{cases} p_5(x - p_1)/(p_2 - p_1), & \text{если } p_1 \leq x \leq p_2 \\ p_5, & \text{если } p_2 \leq x \leq p_3 \\ p_5(x - p_4)/(p_3 - p_4), & \text{если } p_3 \leq x \leq p_4. \end{cases} \quad (4)$$

Целевая функция (1) и компоненты вектора градиента в случае ФП (4) определяются следующим образом:

$$F_2(P) = \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_5(\bar{x}_i - p_1)/(p_2 - p_1)] - \bar{\mu}_i \}^2 + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} (p_5 - \mu_i)^2 + \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \{ [p_5(\bar{x}_i - p_4)/(p_3 - p_4)] - \bar{\mu}_i \}^2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_1} = \frac{2p_5}{(p_2 - p_1)^3} \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_5(\bar{x}_i - p_1) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_1)](p_1 - \bar{x}_i) \};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_2} = \frac{2p_5}{(p_2 - p_1)^3} \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_5(\bar{x}_i - p_1) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_1)](\bar{x}_i - p_2) \}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_3} = \frac{2p_5}{(p_3 - p_4)^3} \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \{ [p_5(\bar{x}_i - p_4) - \bar{\mu}_i(p_3 - p_4)](p_4 - \bar{x}_i) \};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_4} = \frac{2p_5}{(p_3 - p_4)^3} \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \{ [p_5(\bar{x}_i - p_4) - \bar{\mu}_i(p_3 - p_4)](\bar{x}_i - p_3) \};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_5} = \frac{2}{(p_2 - p_1)^2} \sum_{i=1}^{N_1} \{ [p_5(\bar{x}_i - p_1) - \bar{\mu}_i(p_2 - p_1)](\bar{x}_i - p_1) \} +$$

$$+ 2 \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} (p_5 - \bar{\mu}_i) + \frac{2}{(p_3 - p_4)^2} \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \{ [p_5(\bar{x}_i - p_4) - \bar{\mu}_i(p_3 - p_4)](\bar{x}_i - p_4) \}.$$

где N_1 – количество точек, удовлетворяющих условию $x_i < p_2$; N_2 – количество точек, удовлетворяющих условию $p_2 < x_i < p_3$.

Симметричная и двусторонняя ФП Гаусса

Ненормализованная симметричная ФП Гаусса определяется следующим образом:

$$\mu_3(x, P) = p_3 e^{-\frac{(x-p_1)^2}{2p_2}}, \quad (6)$$

т.е. $P \in R^3$. Двусторонняя ФП Гаусса (two-sided Gaussian function) определяется так:

$$\mu_4(x, P) = \begin{cases} p_3 e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}}, & x \leq p_1 \\ p_3, & p_1 \leq x \leq p_4 \\ p_3 e^{-\frac{(x_i - p_4)^2}{2p_5}}, & x \geq p_4. \end{cases} \quad (7)$$

т.е. $P \in R^5$. В случае симметричной ФП Гаусса целевая функция (1) примет следующий вид:

$$F_3(P) = \sum_{i=1}^N \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} - \bar{\mu}_i \right)^2, \quad (8)$$

для двусторонней ФП Гаусса:

$$F_4(P) = \sum_{i=1}^{N_1} \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} - \bar{\mu}_i \right)^2 + \sum_{i=N_1}^{N_1+N_2} (p_3 - \mu_i)^2 + \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_4)^2}{2p_5}} - \bar{\mu}_i \right)^2. \quad (9)$$

Здесь N_1 – число наблюдаемых экспертных значений x_i , для которых $x_i \leq p_1$; N_2 – число наблюдаемых экспертных значений для которых $p_1 \leq x_i \leq p_3$. Несложно получить следующие формулы для компонентов вектора градиента функции (9):

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_1} = \frac{2p_3}{p_2} \sum_{i=1}^{N_1} \left[e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} - \bar{\mu}_i \right) (\bar{x}_i - p_1) \right],$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_2} = \frac{p_3}{2p_2} \sum_{i=1}^{N_1} \left[e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} - \bar{\mu}_i \right) (\bar{x}_i - p_1)^2 \right],$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_3} = 2 \sum_{i=1}^{N_1} \left[e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_1)^2}{2p_2}} - \bar{\mu}_i \right) \right] + 2 \sum_{i=N_1}^{N_1+N_2} (p_3 - \bar{\mu}_i) + 2 \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \left[e^{-\frac{(x_i - p_4)^2}{2p_5}} \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_4)^2}{2p_5}} - \bar{\mu}_i \right) \right],$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_4} = \frac{2p_3}{p_5} \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \left[e^{-\frac{(x_i - p_4)^2}{2p_5}} \left(p_3 e^{-\frac{(x_i - p_4)^2}{2p_5}} - \bar{\mu}_i \right) (\bar{x}_i - p_4) \right],$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_5} = \frac{p_3}{2p_5^2} \sum_{i=N_1+N_2+1}^N \left[e^{-\frac{(x_i-p_4)^2}{2p_5}} \left(p_3 e^{-\frac{(x_i-p_4)^2}{2p_5}} - \bar{\mu}_i \right) (\bar{x}_i - p_4)^2 \right].$$

ФП колоколообразного типа

Ненормализованная ФП колоколообразного типа для нечетких множеств определяется с помощью четырех параметров следующим образом:

$$\mu_5(x, P) = \frac{p_4}{1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}}, \quad (10)$$

где p_4 – высота ФП. Целевая функция (1) в случае колоколообразной ФП (10) определяется следующим образом:

$$F_5(P) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_4}{1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}} - \bar{\mu}_i \right)^2, \quad (11)$$

Формулы для компонентов вектора градиента функции (11) имеют вид:

$$\frac{\partial F_5}{\partial p_1} = \frac{4p_3 p_4^2}{p_1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_4}{1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}} - \bar{\mu}_i \right) \frac{\left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}}{\left(1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3} \right)^2},$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial p_2} = \frac{4p_3 p_4^2}{p_1^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_4}{1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}} - \bar{\mu}_i \right) \frac{(x - p_2) \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3 - 2}}{\left(1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3} \right)^2},$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial p_3} = -4p_4 \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_4}{1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}} - \bar{\mu}_i \right) \frac{\left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3} \ln \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|}{\left(1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3} \right)^2},$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial p_4} = 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_4}{1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}} - \bar{\mu}_i \right) \frac{1}{1 + \left| \frac{x - p_2}{p_1} \right|^{2p_3}}.$$

Гладкая ФП

Параметрически заданный класс гладких ФП определяется следующим образом [3]:

$$\mu_A(x; P) = f_i(x, K^i) = k_1^i + k_2^i x + k_3^i / (k_4^i + x), \quad x \in (p_i, p_{i+1}), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (12)$$

здесь $K^i(k_1^i, k_2^i, k_3^i, k_4^i)$ - вектор коэффициентов i -ой функции, который определяется с помощью аналитических формул, зависящих от вектора параметров $P \in R^{12}$, $f_2(x, P)$, и $f_5(x, P)$ линейные функции, а остальные функции гиперболические.

Целевая функция (1) в случае гладких функций определяется следующим образом:

$$F(P) = \sum_{i=1}^N [\mu_A(\bar{x}_i; P) - \bar{\mu}_A^i]^2. \quad (13)$$

Данная функция имеет некоторые свойства, которые ставят ограничения на параметры, и, следовательно, минимизация функции (13) сводится к задаче условной конечномерной оптимизации.

Для решения этой задачи используется комбинация методов штрафных функций и проекции градиента [4].

Таблица 1

Данные о значениях функции принадлежности для заданных $\bar{x}_i, i = 1, \dots, 20$

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{x}_i	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$\bar{\mu}_A^i$	0,008	0,040	0,129	0,400	0,900	0,991	0,998	1	0,963	0,729
I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
\bar{x}_i	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
$\bar{\mu}_A^i$	0,471	0,230	0,116	0,064	0,353	0,019	0,009	0,004	0,001	0,000

Численные эксперименты

Получено 20 экспертных данных о значениях функции принадлежности нечеткому множеству $A=«\text{возраст молодых мужчин}»$, приведенных в таблице 1. В результате минимизации функции (1) получены оптимальные значения векторов параметров ФП из разных классов (табл. 2).

Кроме этого в таблице 2 приведены значения целевой функции и максимальные отклонения полученных ФП от экспертных данных

$$\Delta_k^j = \max_{1 \leq i \leq 20} |\mu(x_i, P) - \bar{\mu}_i|,$$

а также относительные отклонения в процентах:

$$\eta_k = \frac{\Delta_k^j}{\bar{\mu}_j} 100\%$$

где k – номер класса ФП; j – номер точки, в котором разность Δ_k^j получит максимальное значение. Как видно из полученных результатов, наименьшие абсолютное и относительное значения отклонения получены в случае, когда ФП из гладкого класса. На рисунке 1 приведены графики ФП из разных классов, полученные в результате минимизации целевой функции.

Как видно из приведенных результатов, ФП из класса гладких функций обладает большими возможностями для более точного описания нечетких множеств. С другой стороны, они требуют большего объема вычислений, но, учитывая возрастающие вычислительные мощности современной компьютерной техники, этим недостатком можно пренебречь.

Таблица 2

Результаты, полученные в процессе минимизации целевой функции

Тип ФП	Полученный вектор параметров	j	Δ_k^j	η_k	$F(p^*)$
Треугольный	(5,24; 20,42; 43,24; 1,16)	5	0,2033	22,8	0,1199
Трапецеидальный	(7,83; 15,24; 24,28; 42,36; 1,09)	7	0,1221	11,66	0,0499
Нормализованная функция Гаусса	(21,973; 53,14)	5	0,2823	30,48	0,2999
Ненормализованная функция Гаусса	(22,299; 53,815; 1,133)	5	0,1878	21,04	0,0999
Двусторонняя функция Гаусса	(15,327; 12,667; 0,98; 28,289; 21,397)	13	0,0658	52,21	0,0269
Колоколообразная	(9,893; 21,336; 2,723; 0,993)	11	0,0701	11,14	0,0289
Гладкая ФП	(0,180; 11,980; 15,042; 24,958; 27,982; 34,858; 59,189; 0,398; 0,879; 0,999; 0,885; 0,311)	12	0,0021	0,285	0,0099

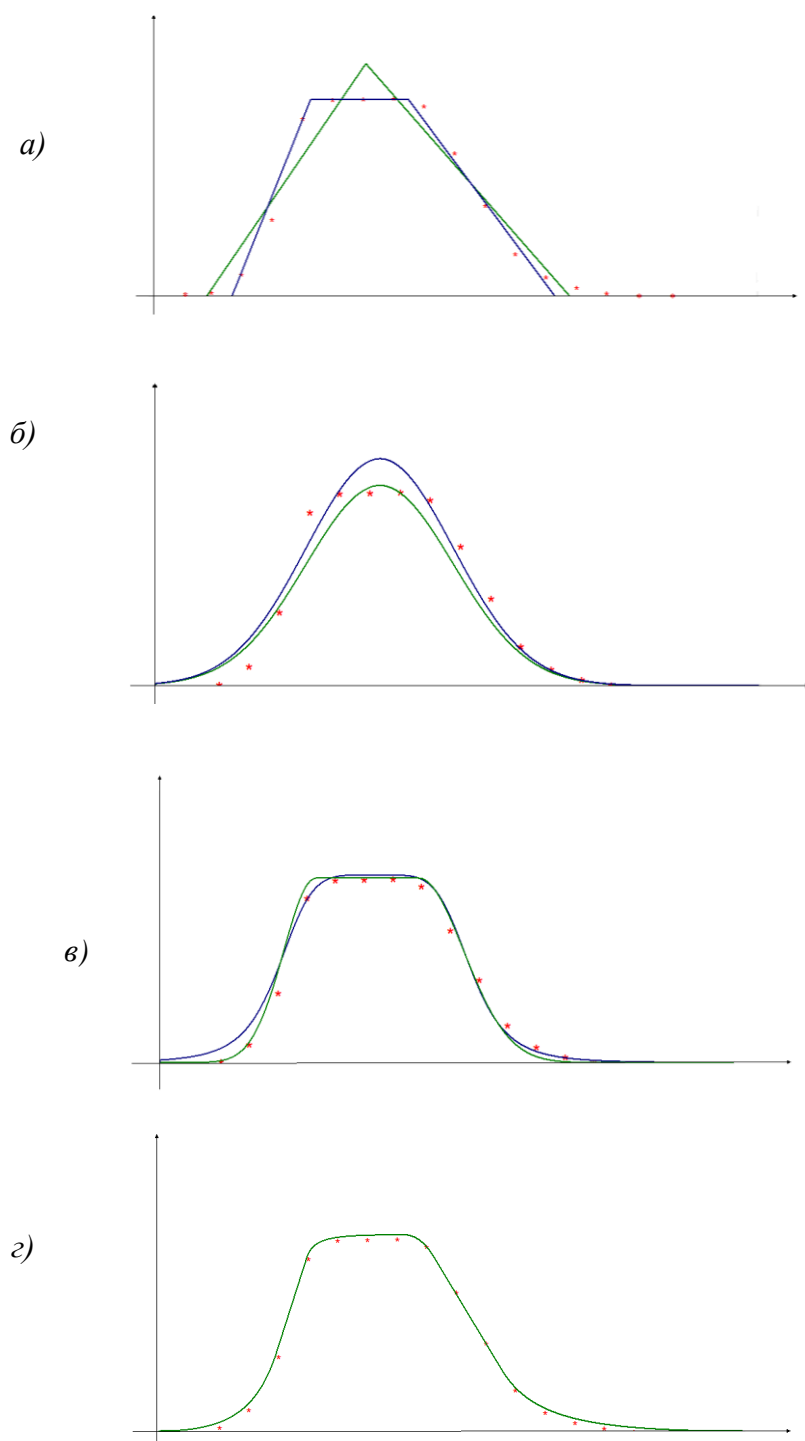


Рис. 1. Графики функций принадлежности из разных классов, полученные в результате аппроксимации:
а) треугольный и трапецеидальный;
б) нормализованная функция Гаусса и ненормализованная функция Гаусса;
в) двусторонняя функция Гаусса и колоколообразная;
г) гладкая ФП; "*" экспертная информация о значениях функции принадлежности

Литература

1. Mandal S.N., Choudhury J.P., Chaudhuri B.S.R. Role of membership functions in fuzzy logic for prediction of shoot length of mustard plant based on residual analysis // World Academy of Science Engineering and Technology, 2008, no 38, pp. 378–384.
2. Himmelblau D.M. Applied nonlinear programming. – McGraw-Hill, 1972, 498 p.
3. Aida-zade K.R., Aliyeva N.T. Study of one class of membership functions of fuzzy sets // Automatic Control and Computer Sciences, 2011, vol. 45, no 3, pp. 142–152.
4. Hill F., Murray W., Wright M. Practical optimization, Academic Press, 1981, 511 p.
5. Aida-zade K.R., Aliyeva N.T. On a class of smooth membership functions // Journal of Automation and Information Sciences, 2012, vol. 44, no 3, pp. 57–71.
6. Rutkowski L. Flexible neuro-fuzzy systems: structures, learning, and performance evaluation, Kluwer Academic Publishers, 2004, 277 p.

UOT 621.322

İsmaylova Nigar T.

AMEA İnformasiya Texnologiyaları İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

aliyevanig@rambler.ru

Verilmiş mənsubiyyət funksiyalar sinfi üçün approksimasiya məsələsi

Üçbucaq, trapes, Qauss, zəngşəkilli və hamar mənsubiyyət funksiyalar sinfi üçün approksimasiya məsələsi həll olunmuşdur. Mənsubiyyət funksiyasının müxtəlif sinifləri üçün məqsəd funksiyasının qradiyentinin analitik düsturları alınmışdır. Məqsəd funksiyasının minimallaşdırılması prosesində alınan nəticələr və funksiyaların qrafikləri göstərilmişdir.

Açar sözlər: mənsubiyyət funksiyası, qeyri-səlis çoxluqlar, məqsəd funksiyası, approksimasiya məsələsi.

Nigar T. Ismaylova

Institute of Information Technology of ANAS, Baku, Azerbaijan

aliyevanig@rambler.ru

Approximation task for given classes of membership functions

Approximation task for triangular, trapezoidal, Gaussian, Bell and class of smooth membership functions was solved. Analytical formulas for gradients of target function for different classes of membership functions were received. Results of the minimization of target function and graphics of membership functions were demonstrated.

Key words: membership function, fuzzy sets, target function, approximation task.